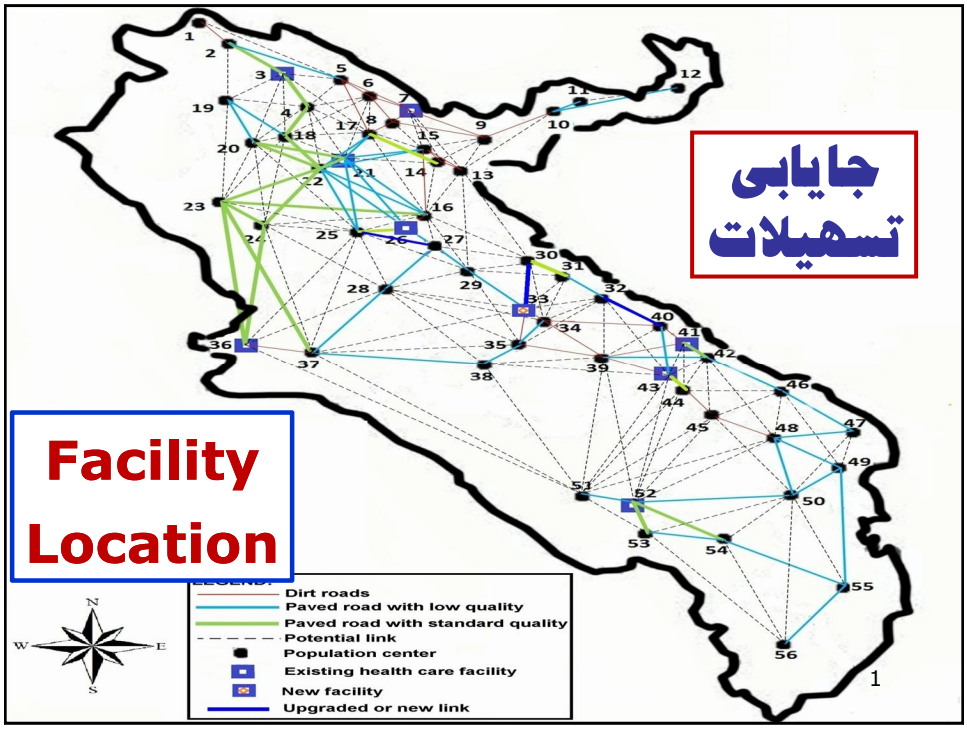


Facility Planning

موضوعات مورد بررسی در این بخش:

- مکان یابی تسهیلات
  - روش وزن دهی
  - مدل های ریاضی
- تعیین محل یک وسیله:
  - فاصله پله ای:
    - روش ترسیمی
    - روش میانه
    - روش جمع اوزان
    - روش برنامه ریزی خطی
    - روش خطوط کانتور
  - مجذور فاصله مستقیم
  - فاصله مستقیم: روش وایزفیلد
- تعیین محل چند وسیله: مدل تخصیص

A.Ghaderi
University of Kurdistan

2

جایابی تسهیلات (تعریف)

به طور کلی جایابی به معنای پیدا کردن محلی مناسب برای نصب و استقرار ماشین یا کارخانه می باشد، به گونه ای که:

۱- دسترسی به منابع مورد نیاز راحت باشد؛

۲- مشکلی برای محیط اطراف ایجاد نکند؛

۳- حمل و نقل حتی الامکان کم و ارتباط امکان پذیر باشد؛

۴- دسترسی به منابع مصرف کننده به راحتی صورت گیرد؛

۵- نیاز ماشین یا کارخانه حتی الامکان در محیط برآورد شدنی باشد؛

۶- پارامترهای هزینه را حذف یا کم اثر نماید.

پارامترهای تأثیرگذار جایابی تسهیلات

- Factors that influence the facility location decision:
  - Transportation (availability, cost)
  - Labor (availability, cost, skills)
  - Materials (availability, cost, quality)
  - Equipment (availability, cost)
  - Land (availability, suitability, cost)
  - Market (size, potential needs)
  - Energy (availability, cost)
  - Water (availability, quality, cost)
  - Waste (disposal, treatment)
  - Financial institutions (availability, strength)
  - Government (stability, taxes, import and export restrictions)
  - Existing plants (proximity)
  - Competitors (size, strength and attitude in that region)
  - Geographical and weather conditions

جایابی تسهیلات: روش وزن دهی

Method of Factor Rating

- Procedure:
  - Identification of the most important factors in evaluating alternative sites for the new facility.
  - Assignment of a weight for each factor
  - Evaluation of the alternative sites in terms of the selected factors (score between 0 and 100)
  - Calculation of weighted score for each location
  - The most weighted alternative is selected as the best alternative.

جایابی تسهیلات: روش وزن دهی

Example

- Three alternative sites are being considered for a new facility. After evaluating the firm's needs, the managers have narrowed the list of important selection criteria down into three major factors. Below are shown the weights which were assigned to the criteria and the evaluation of each site. Which site should be selected?

Factor	*Weight*
Availability of skilled labor	0.50
Availability of Raw materials	0.30
Proximity to the firm's markets	0.20 (Total = 1.0)

Factor	*Site Scores*		
	Site A	*Site B*	*Site C*
Availability of skilled labor	70	70	50
Availability of Raw materials	60	40	90
Proximity to the firm's markets	70	95	60

Facility Planning

جایابی تسهیلات: روش وزن دهی

Example

- Calculate ***weighted scores***: (site score)x(factor weight)

Weight	Factor	Site A Score	Site A Weighted	Site B Score	Site B Weighted	Site C Score	Site C Weighted
0.50	Skilled labor	70	35	70	35	50	25
0.30	Raw materials	60	18	40	12	90	27
0.20	Market Prox.	70	14	95	19	60	12
	Total Weighted Scores		67		66		64

- From these results, the largest total weight is for Site A. It appears to be the best location.

Facility Planning

جایابی تسهیلات: روش وزن دهی

Example

- What happens if we change the factor weights?
- Let's use the following factor weights: skilled labor - 0.45; raw materials - 0.40; and market - 0.15
- Then the following results are obtained:

Factor	Site A Score	Site A Weighted	Site B Score	Site B Weighted	Site C Score	Site C Weighted
Skilled labor	70	31.5	70	31.5	50	22.5
Raw materials	60	24	40	16	90	36
Market Prox.	70	10.5	95	14.25	60	9
Total Weighted Scores		66		61.75		67.5

- In this case, Site C appears to be the best choice with largest weight score.
- **Factor rating method is very sensitive to the weights assigned to each factor.**

دسته‌بندی مسائل جایابی

- تعداد تسهیلات جدید
  - تعیین محل یک وسیله **Single Facility Location**
  - تعیین محل چند وسیله **Multi Facility Location**
- شکل تابع هدف
  - خطی: حداقل نمودن مجموع هزینه‌ها (**Minsum**)
  - غیرخطی: **Minimax** (مسائل مکان یابی تسهیلات اضطراری نظیر آمبولانس و ...)
- نوع فضای جواب
  - فضای جواب گسسته
  - فضای جواب پیوسته
- و ...

انواع مدل های ریاضی مکان یابی تسهیلات

- الف) مدلهای پیوسته: تمام نقاط را می توان به عنوان محل استقرار ماشین آلات استفاده کنیم.
- ب) مدلهای گسسته: وسایل جدید بایستی در محلهایی که مشخص شده قرار گیرند.

Facility Planning

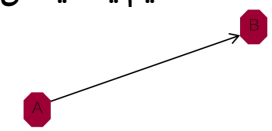
معیارهای اندازه‌گیری فاصله

- فاصله مختصاتی یا پله‌ای یا دکارتی یا متعامد **Rectilinear norm**

$$d\left(\bar{X}, P_i\right) = |x - a_i| + |y - b_i|$$

- فاصله مستقیم یا اقلیدسی **Euclidean norm**

$$d\left(\bar{X}, P_i\right) = \sqrt{\left(x - a_i\right)^2 + \left(y - b_i\right)^2}$$



- مجذور فاصله مستقیم **Squared Euclidean norm**

$$d\left(\bar{X}, P_i\right) = \left(x - a_i\right)^2 + \left(y - b_i\right)^2$$

- فاصله مسسیر واقعی جریان **Flow path Distance**

Facility Planning

تعیین محل یک وسیله

- تعیین محل یک وسیله جدید بین وسایل موجود در مدل پیوسته با فاصله متعامد:
- هدف: یافتن مکان استقرار وسیله جدید به نحوی که کل هزینه‌های حمل‌ونقل را حداقل نماید.
- که در آن:

$$min\ f\left(\bar{X}\right) = \sum_{i=1}^{m} w_i\, d\left(\bar{X}, P_i\right)$$

m : تعداد وسایل موجود

$P_i\left(a_i, b_i\right)$: مختصات وسیله موجود i

w_i : میزان جریان بین وسیله موجود i و وسیله جدید

$\bar{X}\left(x, y\right)$: مختصات استقرار وسیله جدید

$d\left(X, P_i\right)$: فاصله بین وسیله جدید و وسیله موجود i

$$d\left(\bar{X}, P_i\right) = |x - a_i| + |y - b_i|$$

فاصله مختصاتی

- مدل ریاضی

$$min\ f\left(\bar{X}\right)=\sum_{i=1}^{m} w_i\left(\left|x-a_i\right|+\left|y-b_i\right|\right)$$

- خاصیت اول: تابع هدف، دارای خاصیت جداپذیری است.

$$min\ f\left(\bar{X}\right)=\sum_{i=1}^{m} w_i\left(\left|x-a_i\right|+\left|y-b_i\right|\right) \quad \begin{cases} min\ f_1\left(\bar{X}\right)=\sum_{i=1}^{m} w_i\left|x-a_i\right| \\ min\ f_2\left(\bar{X}\right)=\sum_{i=1}^{m} w_i\left|y-b_i\right| \end{cases}$$

فاصله مختصاتی

- خاصیت دوم: مختصه x وسیله جدید، بر روی مختصه x بعضی از وسایل موجود و مختصه y وسیله جدید، بر روی مختصه y بعضی از وسایل موجود قرار می‌گیرد.
- خاصیت سوم: نقطه استقرار بهینه، نقطه‌ی میانه است به نحویکه:
  - نیمی از حمل‌ها در بالا و نیمی دیگر از حمل‌ها در پایین آن واقع هستند.
  - نیمی از حمل‌ها در سمت راست و نیمی دیگر در سمت راست آن واقع می‌باشند.

مثال

- مکان استقرار ۴ وسیله، به شرح زیر می‌باشد. یک وسیله جدید باید به این مجموعه افزوده شود. نسبت (درصد) حمل وسایل موجود با وسیله جدید نیز به شرح زیر است.

$$P_1(4,2) \quad P_2(8,5) \quad P_3(11,8) \quad P_4(13,2)$$

$$w_1 = \frac{1}{6} \quad w_2 = \frac{1}{3} \quad w_3 = \frac{1}{3} \quad w_4 = \frac{1}{6} \quad X(x,y) = ?$$

$$\begin{cases} min\ f_1 = \frac{1}{6}|x-4| + \frac{1}{3}|x-8| + \frac{1}{3}|x-11| + \frac{1}{6}|x-13| \\ min\ f_2 = \frac{1}{6}|y-2| + \frac{1}{3}|y-5| + \frac{1}{3}|y-8| + \frac{1}{6}|y-2| \end{cases}$$

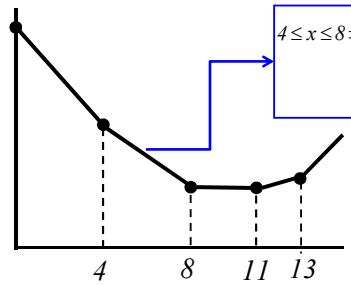
روش‌های حل فاصله مختصاتی

1) روش ترسیمی
2) روش میانه
3) روش جمع اوزان
4) استفاده از برنامه‌ریزی خطی
5) روش منحنی های هم تراز

۱) روش ترسیمی

- رسم نمودن توابع هدف و به دست آوردن نقطه کمینه

$$min\ f_1 = \frac{1}{6}|x-4| + \frac{1}{3}|x-8| + \frac{1}{3}|x-11| + \frac{1}{6}|x-13|$$



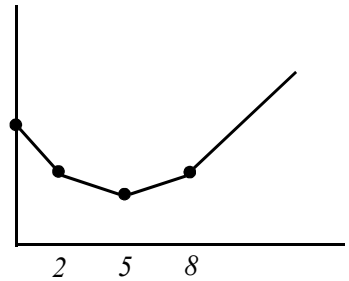
$$4 \le x \le 8 \Rightarrow f_1(x) = \frac{1}{6}(x-4) + \frac{1}{3}(8-x) + \frac{1}{3}(11-x) + \frac{1}{6}(13-x)$$
$$= -\frac{4}{6}x + \frac{57}{6}$$

$$8 \le x^* \le 11$$

۱) روش ترسیمی

- رسم نمودن توابع هدف و به دست آوردن نقطه کمینه

$$min\ f_2 = \frac{1}{6}|y-2| + \frac{1}{3}|y-5| + \frac{1}{3}|y-8| + \frac{1}{6}|y-2|$$



$$y^* = 5$$

۲) روش میانه MEDIAN METHOD

اساس این روش منطق "محل میانی" و اصل تعادل است.

خلاصه روش میانه به شرح زیراست:

- مختصه‌های x وسایل موجود را به صورت صعودی مرتب نمایید.
- به اندازه مقدار جریان هر یک از وسایل موجود با وسیله جدید، مختصه x وسیله موجود را تکرار کنید. عددی که در وسط قرار دارد، مقدار بهینه برای x می‌باشد.
- برای مختصه y نیز دو مرحله فوق را انجام دهید.

۲) روش میانه: مثال

$P_1(4,2)$ $P_2(8,5)$ $P_3(11,8)$ $P_4(13,2)$

$w_1 = \frac{1}{6}$ $w_2 = \frac{1}{3}$ $w_3 = \frac{1}{3}$ $w_4 = \frac{1}{6}$

$w_1 = 1$ $w_2 = 2$ $w_3 = 2$ $w_4 = 1$

$4 \quad 8 \quad \underline{8 \quad 11} \quad 11 \quad 13$

$8 \le x^* \le 11$

$2 \quad 2 \quad \underline{5 \quad 5} \quad 8 \quad 8$

$y^* = 5$

۳) روش جمع اوزان CUMULATIVE WEIGHT METHOD

- مختصه‌های x وسایل موجود را به صورت صعودی مرتب نمایید.
- جمع تجمعی وزن‌ها را براساس ترتیب به دست آمده محاسبه کنید.
- مقدار بهینه x نقطه‌ای است که در آن، جمع تجمعی وزن‌ها برای اولین بار بزرگتر یا مساوی نصف مجموع کل وزن‌ها می‌گردد.
- در حالتی که در نقطه‌ای، جمع تجمعی برابر نصف مجموع وزن‌ها باشد، بازه بین این نقطه و نقطه بعدی، بهینه خواهد بود.
- برای مختصه y نیز دو مرحله فوق را انجام دهید.

۳) روش جمع اوزان: مثال ۱

نقطه	مختصه x	وزن	جمع تجمعی
P1	4	1	1
P2	8	2	3
P3	11	2	5
P4	13	1	6

$$8 \le x^* \le 11$$

نقطه	مختصه y	وزن	جمع تجمعی
P1, P4	2	2	2
P2	5	2	4
P3	8	2	6

$$y^* = 5$$

۳) روش جمع اوزان: مثال ۲

مثال : یک شرکت اجاره دهنده اتومبیل دارای ۵ شعبه در شهر می باشد که مشتریان قادر به تحویل یا دریافت ماشین در هر یک از شعب می باشند این شرکت متعهد است یک تعمیرگاه مرکزی جهت سرویس اتومبیل ها ایجاد نماید مختصات محل ۵ شعبه و تعداد تردد اتومبیل ها بین شعب و محل سرویس به قرار زیر است. مطلوبست محل احداث تعمیرگاه به نحوی که کل مسافت طی شده حداقل باشد.

i	۱	۲	۳	۴	۵
(x_i , y_i)	(۰ و ۳)	(۳ و ۱۶)	(۱۸ و ۲)	(۸ و ۱۸)	(۲۰ و ۲)
w_i	۵	۲۲	۴۱	۶۰	۳۴

۳) روش جمع اوزان: مثال ۲

برای تعیین x^* بهینه x نقاط موجود را به ترتیب صعودی مرتب نموده و w_i های مربوطه را مقابل هر یک می نویسیم. آنگاه مجموع وزنها را بصورت تجمعی در ستون دیگر از بالا به پائین محاسبه می کنیم.

i	x_i	w_i	c.w.	
۱	۰	۵	۵	
۲	۳	۲۲	۲۷	< ۸۱
۳	۸	۶۰	۸۷	> ۸۱
۴	۱۸	۴۱	۱۲۸	
۵	۲۰	۳۴	۱۶۲	

جمع تعداد اتومبیل های تردد کننده در روز ۱۶۲ است لذا محل میانی برابر با ۸۱ خواهد بود و چون اولین عدد تجمعی بزرگتر از ۸۱ دارای x برابر ۸ می باشد لذا مقدار مختصات x متناظر با ۸ است. $(x^*=8)$

i	y_i	w_i	c.w.	
۱	۰	۵	۵	
۵ و ۳	۲	۴۱ + ۳۴	۸۰	< ۸۱
۲	۱۶	۲۲	۱۰۲	> ۸۱
۴	۱۸	۶۰	۱۶۲	

$(y^*=16)$

Facility Planning

۴) تبدیل به برنامه‌ریزی خطی

- تبدیل خطی برای قدرمطلق

$$min\ f_1(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{m} w_i |x - a_i|$$

$$|a-b| = (p+q)$$

$$\begin{cases} a-b-p+q=0 \\ p \geq 0 \\ q \geq 0 \\ p.q = 0 \end{cases}$$

$$min\ f_1(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{m} w_i (p_i + q_i)$$

$$x - p_i + q_i = a_i \quad \forall i$$

$$p_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$q_i \geq 0 \quad \forall i$$

وجود محدودیت ۰ =pq ضروری نیست. چون به علت وابسته بودن ضرایب آنها هر دو نمی توانند در پایه حاضر باشند. P ها ضریبشان ۱- و q ها ضریبشان ۱+ است یعنی وابستگی خطی دارند.

Facility Planning

۴) تبدیل به برنامه‌ریزی خطی: مثال

$$min\ f_1 = \frac{1}{6}|x-4| + \frac{1}{3}|x-8| + \frac{1}{3}|x-11| + \frac{1}{6}|x-13|$$

$$min\ f_1 = \frac{1}{6}(p_1+q_1) + \frac{1}{3}(p_2+q_2) + \frac{1}{3}(p_3+q_3) + \frac{1}{6}(p_4+q_4)$$

$$x - p_1 + q_1 = 4$$

$$x - p_2 + q_2 = 8$$

$$x - p_3 + q_3 = 11$$

$$x - p_4 + q_4 = 13 \qquad p_i, q_i \geq 0$$

سوال ۸۶

فرض کنید سه ماشین در یک کارگاه مستقر شده اند و قرار است ماشین جدیدی در این کارگاه مستقر شود. اگر حرکت بارها در طول راهروهای عمود بر هم انجام شود، با توجه به تابع هزینه زیر، مکان بهینه برای استقرار ماشین جدید کدام است؟

$$f(x,y) = ۳|x-۳| + ۴|x-۰| + |x-۲| + ۳|y-۳| + ۴|y-۱| + |y-۳|$$

سوال ۹۲

۷۶- به منظور استقرار یک واحد اتش نشانی جهت سرویس دهی به ۵ نقطهٔ جمعیتی شهری ۴ مکان نامزد شده است. اطلاعات مربوط به فاصلهٔ این چهار مکان نامزد تا مراکز جمعیتی در جدول زیر نشان داده شده است. به فرض آنکه هیچ اولویتی بین ۵ منطقهٔ شهری از جهت سرویس‌دهی وجود نداشته باشد، بهتر است این واحد در کدام محل استقرار یابد ؟ (فواصل بر حسب کیلومتر باشد)

مکان نامزد	۱	۲	۳	۴	۵
M	۱۰	۲۰	۳۵	۱۲	۱۶
N	۲۰	۴۰	۱۰	۲۵	۷
O	۲۲	۱۳	۷	۲۸	۱۱
P	۱۵	۳۲	۳	۹	۱۷

۱) مکان M ۲) مکان N ۳) مکان P ۴) مکان O

- تسهیلات اضطراری – تابع هدف به صورت **minmax**
- حالت عادی – تابع هدف به صورت **min sum**

Facility Planning

سوال ۸۳ ۳ ماشین در یک کارگاه مستقر است. قرار است ماشین جدیدی بین آن‌ها مستقر شود. محل استقرار ۳ ماشین موجود به‌شرح زیر است.

$p_1 = (3,10)$ ، $p_2 = (4,5)$ ، $p_3 = (6,1)$

حجم حمل و نقل بین ماشین‌های موجود و ماشین جدید به‌ترتیب $w_1 = 15$ ، $w_3 = 5$ ، $w_2 = ?$ می‌باشد. به ازای چه مقدار از w_2 منطقه جواب بهینه یک سطح خواهد بود؟(فرض می‌شود مسیرهای حمل و نقل پله‌ای است)

۱) $w_2 = 3$ ۲) $w_2 = 5$

۳) $w_2 = 10$ ۴) w_2 می‌تواند بین ۵ تا ۱۰ متغیر باشد.

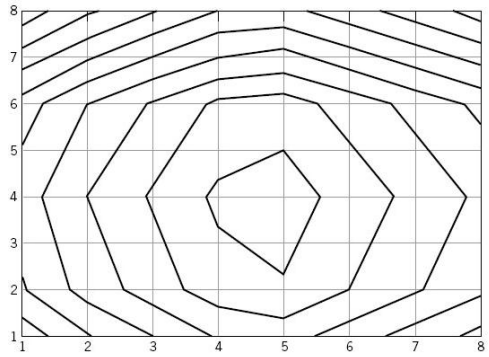
Facility Planning

سوال ۸۸ **قرار است کارخانه ای در یکی از چهار مکان A، B، C و D احداث شود. هزینه های ثابت و متغیر هریک از مکانها مطابق جدول زیر می باشد. اگر چنانچه خروجی مورد انتظار ۶۰۰۰ محصول در سال و قیمت فروش هر واحد محصول برابر ۱۳۰ واحد پولی باشد، کدام مکان انتخاب می شود؟**

مکان بالقوه	هزینه ثابت در سال	هزینه متغیر به ازای هر واحد محصول
A	۱۵۰۰۰۰	۷۵
B	۲۰۰۰۰۰	۵۰
C	۳۰۰۰۰۰	۳۵
D	۴۰۰۰۰۰	۲۵

۵) روش منحنی های هم تراز Contour Lines Method

- منحنی های هم تراز در واقع خطوط شکسته محدبی هستند که به صورت یک منحنی بسته رسم شده و نقاط با هزینه یکسان را نمایش می دهند و استقرار دپارتمان در هر جای این منحنی یک هزینه دارد.



۵) روش منحنی های هم تراز Contour Lines Method

- ویژگی این روش این است که علاوه بر اینکه جواب بهینه را تعیین می کند، اگر در جواب، نقطه بهینه نشدنی باشد، روشهای جایگزین را هم معرفی می کند.

روش به دست آوردن شیب منحنی هم تراز به شکل زیر است:

شیب منحنی هم تراز $M = -\frac{S_x}{S_y}$

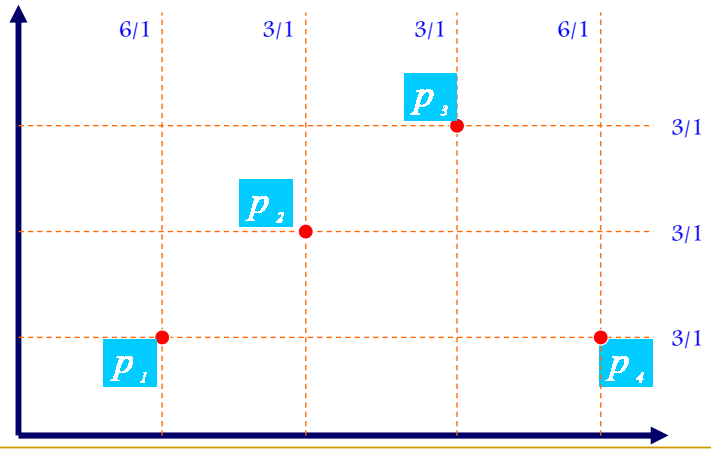
$S_x \leftarrow$ همان شیب x در فاصله ی موردنظر است.

$S_y \leftarrow$ همان شیب y در فاصله ی موردنظر است.

Facility Planning

۵) روش منحنی های هم تراز

قدم اول: روی صفحه مختصات محل تسهیلات موجود را مشخص کرده و از هر کدام دو خط متعامد رسم می کنیم.

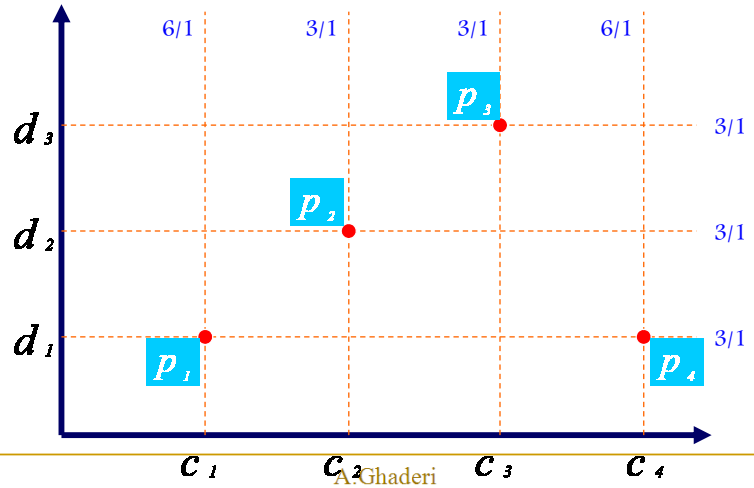


A.Ghaderi
University of Kurdistan

Facility Planning

* خطوط عمودی را از چپ به راست 1,2,.....,p و خطوط افقی را از پایین به بالا 1,2,.....,q بنامید.

محل تقاطع محور xها با jامین خط عمودی را c_j و محل تقاطع محور yها با iامین خط افقی را d_i بنامید.



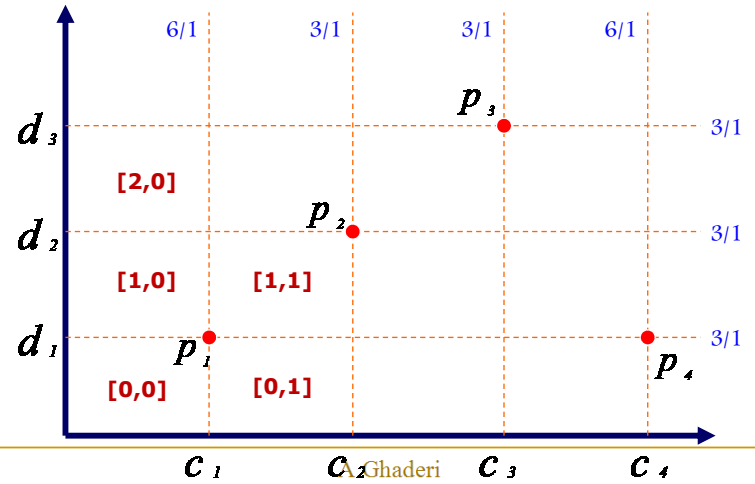
A.Ghaderi
University of Kurdistan

Facility Planning

ناحیه محصور بین خطوط عمودی j , j+1 , i , i+1 را ناحیه [i,j] بنامید.

C_j: جمع اوزان نقاط موجود برروی خط c_j

D_j: جمع اوزان نقاط موجود برروی خط d_j



Facility Planning

۵) روش منحنی های هم تراز

قدم دوم: مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$M_p = M_{p-1} + 2C_p \quad \forall p = 1,2,\dots,P$$

$$M_0 = \sum C_j = \sum w_i = 1$$

$$M_1 = M_0 + 2C_1 = \frac{2}{3}$$

$$M_2 = M_1 + 2C_2 = 0$$

$$M_3 = \frac{2}{3}$$

$$M_4 = 1$$

۵) روش منحنی های هم تراز

$$N_q = N_{q-1} + 2D_q \quad \forall q = 1,2,\dots,q$$

$$N_0 = -\sum D_i = -\sum w_i = -1$$

$$N_1 = N_0 + 2D_1 = -\frac{1}{3}$$

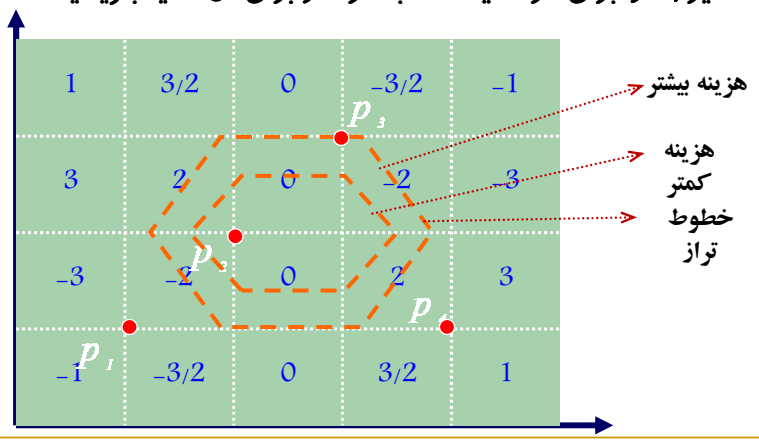
$$N_2 = N_1 + 2D_2 = \frac{1}{3}$$

$$N_3 = 1$$

۵) روش منحنی های هم تراز

قدم سوم:

هر خط ترازی که از ناحیه $[i,j]$ بگذرد دارای ضریب زاویه $S_{ij} = -\frac{M_{ij}}{N_{ij}}$ خواهد بود. مقادیر S_{ij} را برای هر ناحیه محاسبه کرده و برای آن ناحیه بنویسید.



Facility Planning

۵) روش منحنی های هم تراز

برای پیدا کردن نقطه بهینه با یکی از چهار حالت زیر روبه رو خواهیم شد:

1) If: $M_{t-1}<0,\ M_t>0 \Rightarrow x^*=c_t$
and $N_{s-1}<0,\ N_s>0 \Rightarrow y^*=d_s$

2) If $M_{t-1}<0,\ M_t=0, \Rightarrow c_t\le x^*\le c_{t+1}$
and $N_{s-1}<0,\ N_s>0 \Rightarrow y^*=d_s$

در مثال ارائه شده

3) If $M_{t-1}<0,\ M_t>0 \Rightarrow x^*=c_t$
and $N_{s-1}<0,\ N_s=0 \Rightarrow d_s\le y^*\le d_{s+1}$

4) If $M_{t-1}<0,\ M_t=0 \Rightarrow c_t\le x^*\le c_{t+1}$
and $N_{s-1}<0,\ N_s=0 \Rightarrow d_s\le y^*\le d_{s+1}$

$M_1=-2/3,\ M_2=0, \Rightarrow 8\le x^*\le 11$

$N_1=-1/3,\ N_2=1/3, \Rightarrow y^*=5$

A.Ghaderi
University of Kurdistan

Facility Planning

فرض کنید در این مرحله جواب بهینه روی یکی از نقاط موجود واقع شده و یا به هر دلیل دیگری در دسترس نمی باشد. در این مرحله باید خطوط تراز یا هم هزینه را رسم نمود. ویژگی صفحه مختصات به دست آمده آن است که از نقطه ای که شروع نموده و خطی را بر اساس ضریب زاویه های به دست آمده رسم کنیم، یک منحنی بسته به دست می آید که کلیه نقاط آن هزینه یکسانی خواهند داشت.

سعی می کنیم نقطه شروع نزدیکترین نقطه به نقطه بهینه باشد.

A.Ghaderi
University of Kurdistan

Facility Planning

تعیین محل یک وسیله

- تعیین محل یک وسیله جدید بین وسایل موجود در مدل پیوسته با **مجذور فاصله مستقیم**

$$d\left(\bar{X}, P_i\right) = \left(x - a_i\right)^2 + \left(y - b_i\right)^2$$

- توجیه فیزیکی ندارد.
- تابع هدف، جداپذیر است.
- نقطه شروع مناسبی برای روش فاصله مستقیم، ایجاد می‌کند.

Facility Planning

تعیین محل یک وسیله: مجذور فاصله مستقیم

- مدل ریاضی:

$$min\ f\left(\bar{X}\right) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left(\left(x - a_i\right)^2 + \left(y - b_i\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial f\left(\bar{X}\right)}{\partial x} = 0 \qquad 2\sum_{i=1}^{m} w_i \left(x - a_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial f\left(\bar{X}\right)}{\partial y} = 0 \qquad 2\sum_{i=1}^{m} w_i \left(y - b_i\right) = 0$$

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \\ y^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} w_i b_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \end{cases}$$

مجذور فاصله مستقیم: مثال

$P_1(4,2)$ $P_2(8,5)$ $P_3(11,8)$ $P_4(13,2)$

$w_1 = \frac{1}{6}$ $w_2 = \frac{1}{3}$ $w_3 = \frac{1}{3}$ $w_4 = \frac{1}{6}$

$$x^* = \frac{4/6 + 8/3 + 11/3 + 13/6}{1} = \frac{55}{6}$$

$$y^* = \frac{2/6 + 5/3 + 8/3 + 2/6}{1} = 5$$

تعیین محل یک وسیله

- تعیین محل یک وسیله جدید بین وسایل موجود در مدل پیوسته با فاصله مستقیم

$$d(\bar{X}, P_i) = \sqrt{\left((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right)}$$

- مدل ریاضی:
  - تابع هدف، جداپذیر نیست.
  - تابع هدف، پیوسته نیست.

$$min\ f(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{m} w_i \sqrt{\left((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right)}$$

$$\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial y} = 0$$

Facility Planning

فاصله مستقیم

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i a_i}{\sqrt{\left((x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right)}}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\sqrt{\left((x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right)}}}$$

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} g_i a_i}{\sum_{i=1}^{m} g_i}$$

$$g_i = \frac{w_i}{\sqrt{\left((x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right)}}$$

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i b_i}{\sqrt{\left((x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right)}}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\sqrt{\left((x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right)}}}$$

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} g_i b_i}{\sum_{i=1}^{m} g_i}$$

A.Ghaderi
University of Kurdistan

45

Facility Planning

روش وایزفیلد

- روشی تکراری برای حل فاصله مستقیم
- نقطه شروع، نقطه بهینه مجذور فاصله مستقیم در نظر گرفته می‌شود.
- محاسبه $(x^{(k)}, y^{(k)})$ تا زمانیکه در دو تکرار متوالی تغییر چندانی صورت نگیرد. یعنی داشته باشیم:

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \le \varepsilon \quad \& \quad \left|y^{(k+1)} - y^{(k)}\right| \le \varepsilon$$

$$x^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} g_i^{(k)} a_i}{\sum_{i=1}^{m} g_i^{(k)}}$$

$$g_i^{(k)} = \frac{w_i}{\sqrt{\left(\left(x^{(k)}-a_i\right)^2+\left(y^{(k)}-b_i\right)^2\right)}}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} g_i^{(k)} b_i}{\sum_{i=1}^{m} g_i^{(k)}}$$

A.Ghaderi
University of Kurdistan

46

مثال

$P_1(0,0)$ $P_2(0,10)$ $P_3(5,0)$ $P_4(12,6)$ $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w$

مجذور فاصله مستقیم

$$g_i^{(0)} = \frac{w_i}{\sqrt{\left(\left(x^{(0)} - a_i\right)^2 + \left(y^{(0)} - b_i\right)^2\right)}}$$

$$x^{(0)} = \frac{17w}{4w} = 4.25$$

$$g_1^{(0)} = \frac{w}{\sqrt{34.06}} \qquad g_3^{(0)} = \frac{w}{\sqrt{16.56}}$$

$$y^{(0)} = \frac{16w}{4w} = 4$$

$$g_2^{(0)} = \frac{w}{\sqrt{54.06}} \qquad g_4^{(0)} = \frac{w}{\sqrt{64.06}}$$

مثال

$$g_1^{(0)} = \frac{w}{\sqrt{34.06}} \qquad g_2^{(0)} = \frac{w}{\sqrt{54.06}} \qquad g_3^{(0)} = \frac{w}{\sqrt{16.56}} \qquad g_4^{(0)} = \frac{w}{\sqrt{64.06}}$$

$$x^{(1)} = \frac{a_1g_1 + a_2g_2 + a_3g_4 + a_4g_4}{g_1 + g_2 + g_4 + g_4} = \frac{\frac{5w}{\sqrt{16.56}} + \frac{12w}{\sqrt{64.06}}}{\frac{w}{\sqrt{34.06}} + \frac{w}{\sqrt{54.6}} + \frac{w}{\sqrt{16.56}} + \frac{w}{\sqrt{64.06}}} = 3.96$$

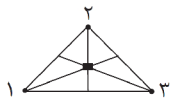
$$y^{(1)} = \frac{b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_4 + b_4g_4}{g_1 + g_2 + g_4 + g_4} = \frac{\frac{10w}{\sqrt{54.06}} + \frac{6w}{\sqrt{64.06}}}{\frac{w}{\sqrt{34.06}} + \frac{w}{\sqrt{54.6}} + \frac{w}{\sqrt{16.56}} + \frac{w}{\sqrt{64.06}}} = 2.25$$

Facility Planning

فاصله مستقیم

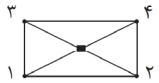
نکته در برخی موارد می‌توان با ترسیم، مکان نقطه بهینه را در فاصله مستقیم (اقلیدوسی) به‌دست آورد.

- ● : محل تسهیلات موجود
- ■ : محل تسهیل جدید



$w_۱ = w_۲ = w_۳$

نقطه بهینه (x^*, y^*) در حالت اقلیدوسی محل برخورد میانه‌های مثلث می‌باشد.



$w_۱ = w_۲ = w_۳ = w_۴$ یا $w_۱ = w_۴ = ۲w_۲ = ۲w_۳$

نقطه بهینه (x^*, y^*) در حالت اقلیدوسی محل برخورد اقطار مستطیل یا مربع است.

Facility Planning

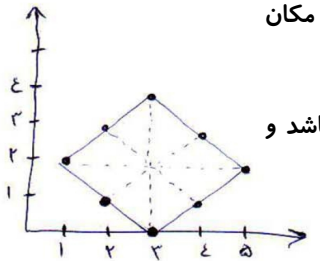
سوال ۹۲

۷۷- در کارگاهی هشت دستگاه ماشین در مکان‌های زیر استقرار پیدا کرده‌اند.

$A = (۱,۲)$ $B = (۵,۲)$ $C = (۴,۳)$ $D = (۲,۳)$ $E = (۳,۴)$ $R = (۳,۰)$ $G = (۲۰,۱)$ $H = (۴,۱)$

قرار است ماشین جدیدی که با ماشین‌آلات موجود در کارگاه ارتباط یکسانی خواهد داشت، استقرار پیدا نماید، به فرض آنکه هزینه حمل و نقل بین ماشین‌آلات موجود جدید بر اساس فاصلهٔ مستقیم محاسبه گردد، مکان بهینه برای ماشین جدید را به طریقی پیدا کنید، که هزینهٔ حمل ونقل آن حداقل گردد؟

۱) ۲ و ۲
۲) ۳ و ۲
۳) ۲ و ۳
۴) ۳ و ۳



با توجه به گزینه ها، مسئله اشکال تایپی داشته و مکان G(2,1) می باشد نه g(20,1).

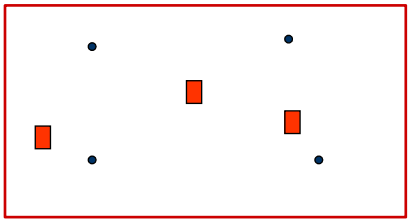
با توجه به شکل تسهیلات مکان بهینه (3,2) می باشد و گزینه ۳ صحیح است.

Facility Planning

تعیین محل چند وسیله در فضای گسسته: مسئله تخصیص

هدف جایابی m تجهیز جدید بین n تجهیز موجود در میان k مکان نامزد است. اگر ماتریس فاصله بین k مکان نامزد و n تجهیز موجود ($D_{k\times n}$) و ماتریس جریان مواد بین تجهیزات جدید و موجود ($I_{n\times m}$) را در اختیار داشته باشیم، با حاصل‌ضرب این دو ماتریس درهم، ماتریس هزینه‌ای حاصل می‌شود که با روش مجارستانی می‌توان به حل آن دست یافت.

$$C_{(k*m)}=D_{(k*n)}*I_{(n*m)}$$



Facility Planning

مسئله تخصیص: فرمواسیون ریاضی

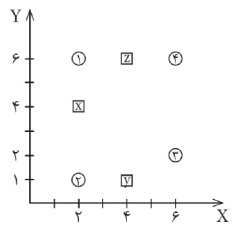
$$\min Z=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}C_{ij}X_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m}X_{ij}=1 & \forall i=1,2,\ldots\ldots,k \\ \sum_{i=1}^{k}X_{ij}=1 & \forall j=1,2,\ldots\ldots,m \\ X_{ij}=0 \text{ or } 1 & \end{cases}$$

مسئله تخصیص

مسئله: در کارخانه‌ای چهار ماشین وجود دارد که با شماره‌های ۱، ۲، ۳و ۴ مشخص می‌شوند. مایلیم سه ماشین جدید را در محل‌های کاندید z، y و x به شرح شکل زیر بین ماشین‌های موجود مستقر کنیم. مقدار حمل و نقل بین ماشین‌های جدید و ماشین موجود نیز به‌شرح جدول از- به در زیر است:

جدید / موجود	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰
۲	۱	۰	۳
۳	۰	۱	۱
۴	۰	۲	۰



در این صورت تخصیص بهینه ماشین‌آلات جدید به محل‌ها به شرح زیر است:

۱) ماشین ۱ به محل x، ماشین ۲ به محل y و ماشین ۳ به محل z

۲) ماشین ۱ به محل x، ماشین ۲ به محل z و ماشین ۳ به محل y

۳) ماشین ۱ به محلy ، ماشین ۲ به محل x و ماشین ۳ به محل z

۴) ماشین ۱ به محل z ، ماشین ۲ به محل y و ماشین ۳ به محل x

(سراسری ۷۷ و آزاد ۸۷)

مسئله تخصیص (جایابی در فضای گسسته)

حل مسئله:

$$I_{۴\times۳} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس فاصله بین ۴ مکان نامزد و ۳ تجهیز موجود : $D_{۳\times۴}$

$$D_{۳\times۴} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۶ & ۶ \\ ۷ & ۲ & ۳ & ۷ \\ ۲ & ۷ & ۶ & ۲ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_{۳\times۳} = D_{۳\times۴} \times I_{۴\times۳} = \begin{bmatrix} ۷ & ۲۴ & ۱۵ \\ ۱۶ & ۳۸ & 9 \\ ۱۱ & ۱۶ & ۲۷ \end{bmatrix}$$

با حل ماتریس C به روش مجارستانی داریم:

$$\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ۱ & ۲ & ۳ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۸ & ۶ \\ ۹ & ۲۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۸ \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} ۱ \to x \\ ۲ \to z \\ ۳ \to y \end{cases}$$

$$z = ۷ + ۹۰ + ۱۶ = ۱۱۳$$

مثال (۲):

ماشینها \ محلها	۱	۲	۳
۱	8	11	10
۲	19	13	16
۳	23	16	25

جایابی در فضای گسسته

قدم اول: حداقل هزینه هر سطر را از تمام اعداد آن سطر کم می کنیم.

0	3	2
6	0	3
7	0	9

Facility Planning

جایابی در فضای گسسته

قدم دوم: حداقل هزینه هر ستون را از تمام مقادیر آن ستون کم می کنیم.

0	3	0
6	0	1
7	0	7

Facility Planning

جایابی در فضای گسسته

قدم سوم: با رسم حداقل خطوط افقی و عمودی تمام صفرها را بپوشانید. اگر تعداد خطوط رسم شده برابر تعداد ماشینها باشد، جواب بهینه حاصل شده است. در غیر اینصورت به قدم چهارم بروید.

0	3	0
6	0	1
7	0	7

جایابی در فضای گسسته

قدم چهارم: حداقل هزینه کل ماتریس را پیدا کرده و آن را به محلهای تقاطع اضافه، و از اعداد خط نخورده کم کنید. به اعدادی که روی خط قرار دارند کاری نداریم.

0	4	0
5	0	0
6	0	6

جایابی در فضای گسسته

$X_{11} = 1$ ← ماشین ۱ به محل ۱ اختصاص پیدا می کند

$X_{23} = 1$ ← ماشین ۲ به محل ۳ اختصاص پیدا می کند

$X_{32} = 1$ ← ماشین ۳ به محل ۲ اختصاص پیدا می کند

هزینه کل $c_{11} + c_{23} + c_{32} = 40$

Facility Planning

سوال ۹۲ چهار ماشین به مختصات **P1(3,5)**، **P2(4,6)**، **P3(7,2)** و **P4(4,3)** موجود است. چنانچه فواصل به صورت خطی شکسته (متعامد) فرض شود، آیا می شود از نقطه **(3,2)** خط ترازی پیرامون نقطه بهینه رسم نمود و چرا؟

(w4=5, w3=3, w2=5, w1=3)

۱) بلی، چون هزینهٔ این نقطه ۶۲ می‌شود و از هزینهٔ نقطهٔ بهینهٔ ۴۶ بیش‌تر است.
۲) بلی، چون هزینهٔ این نقطه ۵۶ می‌شود و از هزینهٔ نقطهٔ بهینهٔ ۳۶ بیش‌تر است.
۳) خیر، چون هزینهٔ این نقطه ۴۲ می‌شود و از هزینهٔ نقطهٔ بهینهٔ ۴۶ کم‌تر است.
۴) خیر، چون هزینهٔ این نقطه ۳۲ می‌شود و از هزینهٔ نقطهٔ بهینهٔ ۳۶ کم‌تر است.

Facility Planning

سوال ۹۱ در حال حاضر در سطح کارگاهی چهار دستگاه ماشین در نقاط زیر استقرار دارند:

P1(4,2)، **P2(2,3)**، **P3(3,5)** و **P4(4,5)**

می خواهیم یک دستگاه جدید که ماشین آلات موجود به ترتیب رابطه ای برابر **w1**، **w2**، **w3** و **w4** دارد استقرار دهیم، به فرض آنکه در محاسبه هزینه حمل و نقل فاصله به صورت مجذور فاصله مستقیم در نظر گرفته شود، تحت چه شرایطی نقطه **(3,4)** کمترین هزینه حمل و نقل برای استقرار ماشین جدید را خواهد داشت؟